त्रिकोणमिति के कुछ अनुप्रयोग

इस अध्याय के सभी महत्वपूर्ण प्रश्न – उत्तर सहित। पहले खुद हल करने की कोशिश करो, फिर उत्तर मिलाओ।

अभ्यास प्रश्न-उत्तर (हर टॉपिक से)

» दृष्टि-रेखा (Line of Sight)

प्रश्न 1 (आसान). अगर तुम एक पेड़ के नीचे खड़े हो और पेड़ की सबसे ऊपर वाली टहनी को देख रहे हो, तो दृष्टि-रेखा कैसी होगी?

उत्तर – ऊपर की ओर झुकी हुई।

प्रश्न 2 (आसान). अगर तुम हवाई जहाज़ में बैठे हो और नीचे ज़मीन देख रहे हो, तो दृष्टि-रेखा कैसी होगी?

उत्तर – नीचे की ओर झुकी हुई।

प्रश्न 3 (मध्यम). एक इमारत की छत पर बैठा व्यक्ति दूर क्षितिज (horizon) को देख रहा है। उसकी दृष्टि-रेखा कैसी होगी?

उत्तर – लगभग क्षैतिज (horizontal)।

» उन्नयन कोण (Angle of Elevation)

प्रश्न 4 (आसान). अगर कोई व्यक्ति ज़मीन पर खड़े होकर 20 मीटर ऊँचे खंभे के शिखर को 45° के उन्नयन कोण पर देख रहा है, तो उसकी आँख से खंभे तक की क्षैतिज दूरी कितनी होगी?

उत्तर – 20 मीटर

प्रश्न 5 (आसान). एक पेड़ की परछाईं ज़मीन पर 10 मीटर लंबी है। अगर सूर्य का उन्नयन कोण 30° है, तो पेड़ की ऊँचाई कितनी होगी?

उत्तर – 10/3 मीटर या 103/3 मीटर

प्रश्न 6 (मध्यम). एक लड़का 1.5 मीटर लंबा है और वह एक चिमनी से 30 मीटर दूर खड़ा है। उसकी आँख से चिमनी के शिखर का उन्नयन कोण 30° है। चिमनी की ऊँचाई ज्ञात कीजिए।

उत्तर – 1.5 + 103 मीटर (लगभग 18.82 मीटर)

» अवनमन कोण (Angle of Depression)

प्रश्न 7 (आसान). यदि आप एक पेड़ पर चढ़कर नीचे सड़क पर चल रहे व्यक्ति को देख रहे हैं, तो कौन सा कोण बनेगा?

उत्तर – अवनमन कोण

प्रश्न 8 (आसान). अवनमन कोण कहाँ बनता है? (देखने वाले की आँख पर / देखी जा रही वस्तु पर)

उत्तर – देखने वाले की आँख पर

प्रश्न 9 (मध्यम). एक मीनार के शिखर से एक कार को देखा जाता है। यदि क्षैतिज स्तर और दृष्टि-रेखा के बीच का कोण 45° है, तो अवनमन कोण कितना होगा?

उत्तर – 45°

» ऊंचाई और दूरी की समस्याओं का परिचय

प्रश्न 10 (आसान). एक सीढ़ी ज़मीन से 6 मीटर ऊँची दीवार तक पहुँचती है। यदि सीढ़ी ज़मीन के साथ 45° का कोण बनाती है, तो सीढ़ी की लंबाई क्या है?

उत्तर – 62 मीटर या लगभग 8.49 मीटर

प्रश्न 11 (आसान). एक खंभा 10 मीटर ऊँचा है। यदि उसकी परछाई 103 मीटर लंबी है, तो सूर्य का उन्नयन कोण क्या होगा?

उत्तर – 30°

प्रश्न 12 (मध्यम). ज़मीन पर एक बिंदु से, एक मीनार के शिखर का उन्नयन कोण 30° है। मीनार की ओर 20 मीटर चलने पर, उन्नयन कोण 60° हो जाता है। मीनार की ऊंचाई ज्ञात कीजिए।

उत्तर – 103 मीटर

प्रश्न 13 (कठिन). एक नदी के किनारे पर खड़ा एक व्यक्ति देखता है कि सामने के किनारे पर एक पेड़ का उन्नयन कोण 60° है। जब वह 20 मीटर पीछे हटता है, तो उन्नयन कोण 30° हो जाता है। नदी की चौड़ाई और पेड़ की ऊंचाई ज्ञात कीजिए।

उत्तर – नदी की चौड़ाई = 10 मीटर, पेड़ की ऊंचाई = 103 मीटर

» समस्या-समाधान: मीनार की ऊँचाई ज्ञात करना

प्रश्न 14 (आसान). एक खंभे के आधार से 10 मीटर दूर एक बिंदु पर, खंभे के शिखर का उन्नयन कोण 45° है। खंभे की ऊँचाई ज्ञात कीजिए।

उत्तर – 10 मीटर

प्रश्न 15 (आसान). एक पतंग 30 मीटर लंबी डोरी के साथ उड़ रही है और धरती से 30° का कोण बना रही है। पतंग की ऊँचाई ज्ञात कीजिए। (डोरी को सीधा मानें)

उत्तर – 15 मीटर

प्रश्न 16 (मध्यम). एक व्यक्ति एक पेड़ के आधार से 20 मीटर दूर खड़ा है। पेड़ के शीर्ष का उन्नयन कोण 30° है। पेड़ की ऊँचाई ज्ञात कीजिए। (3 = 1.732)

उत्तर – 11.54 मीटर (लगभग)

प्रश्न 17 (कठिन). एक नदी के किनारे एक पेड़ खड़ा है। नदी के दूसरे किनारे पर सीधे पेड़ के सामने एक बिंदु से, पेड़ के शीर्ष का उन्नयन कोण 60° है। जब इस बिंदु से 20 मीटर पीछे हट जाते हैं, तो उन्नयन कोण 30° हो जाता है। पेड़ की ऊँचाई और नदी की चौड़ाई ज्ञात कीजिए।

उत्तर – पेड़ की ऊँचाई = 17.32 मीटर, नदी की चौड़ाई = 10 मीटर

» समस्या-समाधान: सीढ़ी की लंबाई और स्थिति

प्रश्न 18 (आसान). अगर एक सीढ़ी दीवार से 3 मीटर दूर रखी है और 30° का कोण बना रही है, तो दीवार पर वह कितनी ऊँचाई तक पहुँचती है? (3 = 1.73)

उत्तर – ऊँचाई 1.73 मीटर

प्रश्न 19 (आसान). एक 6 मीटर लंबी सीढ़ी ज़मीन से 45° का कोण बनाती है। वह दीवार पर कितनी ऊँचाई तक पहुँचेगी? (2 = 1.41)

उत्तर – ऊँचाई 4.23 मीटर

प्रश्न 20 (मध्यम). एक पेड़ 12 मीटर ऊँचा है। एक लड़का पेड़ के शिखर तक पहुँचने के लिए एक सीढ़ी का उपयोग करता है। यदि सीढ़ी ज़मीन से 60° का कोण बनाती है, तो सीढ़ी की लंबाई ज्ञात कीजिए। (3 = 1.73)

उत्तर – सीढ़ी की लंबाई 13.84 मीटर

प्रश्न 21 (कठिन). एक इमारत की खिड़की तक पहुँचने के लिए एक 10 मीटर लंबी सीढ़ी का उपयोग किया जाता है। यदि सीढ़ी ज़मीन से 45° का कोण बनाती है, तो खिड़की की ऊँचाई क्या है? और सीढ़ी का निचला सिरा इमारत से कितनी दूर है?

उत्तर – खिड़की की ऊँचाई 7.07 मीटर; सीढ़ी से इमारत की दूरी 7.07 मीटर

» समस्या-समाधान: प्रेक्षक की ऊंचाई के साथ

प्रश्न 22 (आसान). 2 मीटर लंबा एक लड़का एक पेड़ से 10 मीटर दूर खड़ा है। उसकी आँख से पेड़ के शिखर का उन्नयन कोण 30° है। पेड़ की ऊँचाई ज्ञात कीजिए। (tan 30° = 1/3)

उत्तर – 2 + 10/3 मीटर

प्रश्न 23 (आसान). एक मीनार 25 मीटर ऊँची है। एक व्यक्ति, जिसकी ऊँचाई 1.6 मीटर है, मीनार के आधार से कुछ दूरी पर खड़ा है। यदि उसकी आँख से मीनार के शिखर का उन्नयन कोण 45° है, तो व्यक्ति मीनार से कितनी दूर खड़ा है?

उत्तर – 23.4 मीटर

प्रश्न 24 (मध्यम). एक नदी के किनारे 1.7 मीटर ऊँचा एक लड़का खड़ा है। वह नदी के दूसरे किनारे पर एक मंदिर के शिखर को देखता है जिसका उन्नयन कोण 60° है। यदि मंदिर की ऊँचाई 30 मीटर है, तो नदी की चौड़ाई ज्ञात कीजिए। (3 = 1.73)

उत्तर – 16.35 मीटर (लगभग)

प्रश्न 25 (कठिन). एक 50 मीटर ऊँचे भवन के शिखर पर 1.6 मीटर ऊँचा एक ध्वजदंड लगा है। एक प्रेक्षक, जिसकी ऊँचाई 1.5 मीटर है, भवन से कुछ दूरी पर खड़ा है। यदि प्रेक्षक की आँख से ध्वजदंड के शिखर का उन्नयन कोण 60° है, तो प्रेक्षक भवन से कितनी दूरी पर है?

उत्तर – 29.97 मीटर (लगभग)

» समस्या-समाधान: दो उन्नयन कोणों का उपयोग करके

प्रश्न 26 (आसान). एक मीनार के पाद से 50 मीटर की दूरी पर स्थित एक बिंदु से मीनार के शिखर का उन्नयन कोण 30° है। मीनार की ऊँचाई ज्ञात कीजिए।

उत्तर – 50/3 मीटर

प्रश्न 27 (आसान). एक खंभे की ऊँचाई 15 मीटर है। जमीन पर उसके पाद से कितनी दूरी पर उन्नयन कोण 45° होगा?

उत्तर – 15 मीटर

प्रश्न 28 (मध्यम). भूमि के एक बिंदु से एक 20 मीटर ऊँचे भवन के शिखर पर लगी एक संचार मीनार के तल और शिखर के उन्नयन कोण क्रमशः 45° और 60° हैं। मीनार की ऊँचाई ज्ञात कीजिए।

उत्तर – 20(3 - 1) मीटर

प्रश्न 29 (कठिन). एक पेडस्टल के शिखर पर एक 1.6 मीटर ऊँची मूर्ति लगी है। भूमि के एक बिंदु से मूर्ति के शिखर का उन्नयन कोण 60° है और उसी बिंदु से पेडस्टल के शिखर का उन्नयन कोण 45° है। पेडस्टल की ऊँचाई ज्ञात कीजिए।

उत्तर – 1.6 / (3 - 1) = 0.8(3 + 1) मीटर

» समस्या-समाधान: सूर्य के उन्नतांश में परिवर्तन

प्रश्न 30 (आसान). यदि सूर्य का उन्नयन कोण 45° से घटकर 30° हो जाता है और परछाई 20 मीटर लंबी हो जाती है, तो मीनार की ऊँचाई ज्ञात करें। (यदि 3 = 1.732)

उत्तर – लगभग 27.32 मीटर

प्रश्न 31 (मध्यम). एक खंभे की परछाई की लंबाई 5 मीटर बढ़ जाती है जब सूर्य का उन्नतांश 60° से 45° हो जाता है। खंभे की ऊँचाई ज्ञात कीजिए।

उत्तर – 2.5(3 + 1) मीटर

प्रश्न 32 (कठिन). एक मीनार की परछाई की लंबाई में 30 मीटर की वृद्धि होती है जब सूर्य का उन्नतांश 75° से 45° हो जाता है। मीनार की ऊँचाई ज्ञात करें।

उत्तर – 15(3+1) मीटर

» समस्या-समाधान: उन्नयन और अवनमन कोण दोनों का उपयोग

प्रश्न 33 (मध्यम). एक नदी के पुल के एक बिंदु से नदी के सम्मुख किनारों के अवनमन कोण क्रमशः 30° और 45° हैं। यदि पुल किनारों से 3 m की ऊँचाई पर हो तो नदी की चौड़ाई ज्ञात कीजिए।

उत्तर – 3(1 + 3) m

प्रश्न 34 (कठिन). 7 m ऊँचे भवन के शिखर से एक केबल टावर के शिखर का उन्नयन कोण 60° है और इसके पाद का अवनमन कोण 45° है। टावर की ऊँचाई ज्ञात कीजिए।

उत्तर – 7(1 + 3) m

» समस्या-समाधान: नदी की चौड़ाई ज्ञात करना

प्रश्न 35 (आसान). यदि पुल की ऊँचाई 5m है और एक किनारे का अवनमन कोण 45° है, तो पुल से उस किनारे तक की क्षैतिज दूरी क्या होगी?

उत्तर – 5 मीटर

प्रश्न 36 (आसान). यदि अवनमन कोण 60° हो और पुल की ऊँचाई 10m हो, तो क्षैतिज दूरी कितनी होगी?

उत्तर – 10/3 मीटर

प्रश्न 37 (मध्यम). एक पुल की ऊँचाई 4m है। नदी के एक किनारे का अवनमन कोण 30° और दूसरे किनारे का 60° है। नदी की चौड़ाई ज्ञात कीजिए।

उत्तर – 4(1/3 + 3) या 4(4/3) मीटर

प्रश्न 38 (कठिन). एक 50m ऊँचे पुल से एक नदी के दो किनारों के अवनमन कोण 30° और 45° हैं। यदि दोनों किनारे पुल के एक ही तरफ हों, तो दोनों किनारों के बीच की दूरी ज्ञात कीजिए। (यह थोड़ा अलग है, बच्चों, ध्यान से चित्र बनाना!)

उत्तर – 50(3 - 1) मीटर

हल किए हुए उदाहरण (step-by-step)

उदाहरण 1. मान लो, तुम 10 मीटर ऊँची छत पर खड़े हो और नीचे ज़मीन पर एक फुटबॉल रखी है। तुम्हारी आँख से उस फुटबॉल तक की दृष्टि-रेखा क्या होगी?

› सबसे पहले, अपनी आँख को एक बिंदु मानो (प्रेक्षक की आँख)।
› दूसरा, फुटबॉल को दूसरा बिंदु मानो (देखी गई वस्तु)।
› अब, इन दोनों बिंदुओं को एक सीधी काल्पनिक रेखा से जोड़ो।
› यही रेखा तुम्हारी दृष्टि-रेखा होगी।

उत्तर – तुम्हारी आँख से फुटबॉल तक एक सीधी तिरछी (नीचे की ओर) काल्पनिक रेखा ही दृष्टि-रेखा होगी।

उदाहरण 2. धरती पर एक मीनार खड़ी है। धरती के एक बिंदु से, जो मीनार के पाद-बिंदु से 15 मीटर दूर है, मीनार के शिखर का उन्नयन कोण 60° है। मीनार की ऊँचाई ज्ञात कीजिए।

› सबसे पहले एक चित्र बनाते हैं। मान लो AB मीनार है, C धरती पर वह बिंदु है जिससे देखा जा रहा है।
› तो BC मीनार के पाद-बिंदु से बिंदु C तक की दूरी है, जो 15 मीटर दी गई है।
› मीनार के शिखर (A) का उन्नयन कोण (ACB) 60° है।
› समकोण त्रिभुज ABC में, हमें मीनार की ऊँचाई (AB) ज्ञात करनी है।
› हम त्रिकोणमितीय अनुपात 'tan' का उपयोग करेंगे क्योंकि इसमें लंब (AB) और आधार (BC) दोनों होते हैं।
› tan(कोण) = लंब / आधार
› tan 60° = AB / BC
› 3 = AB / 15
› AB = 153 मीटर

उत्तर – मीनार की ऊँचाई 153 मीटर है।

उदाहरण 3. एक 10 मीटर ऊँचे भवन की छत से एक लड़का ज़मीन पर रखे खिलौने को देख रहा है। यदि लड़के की आँख से खिलौने तक की दृष्टि-रेखा, क्षैतिज रेखा से 30° का कोण बनाती है, तो अवनमन कोण ज्ञात कीजिए।

› यहाँ लड़का भवन की छत पर है, इसलिए वो ऊपर से नीचे देख रहा है।

› दृष्टि-रेखा क्षैतिज स्तर से नीचे है।

› प्रश्न में ही अवनमन कोण 30° दिया गया है, क्योंकि 'दृष्टि-रेखा, क्षैतिज रेखा से 30° का कोण बनाती है' का मतलब ही यही है कि यह अवनमन कोण है।

उत्तर – अवनमन कोण = 30°

उदाहरण 4. एक टावर ज़मीन पर सीधा खड़ा है। ज़मीन पर एक बिंदु, जो टावर के आधार से 15 मीटर दूर है, से टावर के शिखर का उन्नयन कोण 60° है। टावर की ऊंचाई ज्ञात कीजिए।

› पहला कदम है चित्र बनाना। एक सीधा टावर बनाओ, ज़मीन पर एक बिंदु, और इन दोनों को जोड़कर एक समकोण त्रिभुज बनाओ।

› टावर की ऊंचाई को 'h' मान लो। ज़मीन पर बिंदु से टावर के आधार की दूरी 15 मीटर है। उन्नयन कोण 60° है।

› अब देखो, हमें आधार (base) पता है (15 मीटर) और लंब (perpendicular) निकालना है (h)। लंब और आधार का संबंध कौन सा अनुपात बताता है? हाँ, tan! tan = लंब / आधार।

› तो, tan 60° = h / 15।

› हमें पता है कि tan 60° का मान 3 होता है।

› तो, 3 = h / 15।

› h निकालने के लिए 15 को 3 से गुणा करेंगे। h = 153 मीटर।

› अगर सवाल में 3 का मान 1.732 रखने को कहा गया है, तो h = 15 × 1.732 = 25.98 मीटर।

› अगर नहीं कहा, तो 153 मीटर ही हमारा उत्तर है।

उत्तर – टावर की ऊंचाई 153 मीटर या लगभग 25.98 मीटर है।

उदाहरण 5. धरती पर एक मीनार सीधी खड़ी है। धरती के एक बिंदु से, जो मीनार के पाद-बिंदु (base) से 15 मीटर दूर है, मीनार के शिखर का उन्नयन कोण 60° है। मीनार की ऊँचाई ज्ञात कीजिए।

› सबसे पहले, हमें एक समकोण त्रिभुज (right-angled triangle) की कल्पना करनी होगी।

› मान लो मीनार AB है, बिंदु C है, और BC आधार से दूरी है। तो BC = 15 मीटर।

› शिखर का उन्नयन कोण ACB = 60° है। हमें मीनार की ऊँचाई AB ज्ञात करनी है।

› यहाँ हमें 'लम्ब' (AB) निकालना है और 'आधार' (BC) दिया हुआ है। लम्ब और आधार के बीच का संबंध tan अनुपात बताता है।

› तो, tan(कोण) = लम्ब / आधार।

› यानी, tan(60°) = AB / 15।

› हमें पता है कि tan(60°) का मान 3 होता है।

› तो, 3 = AB / 15।

› AB = 15 × 3।

› यानी, AB = 153 मीटर।

उत्तर – मीनार की ऊँचाई 153 मीटर है।

उदाहरण 6. एक बिजली मिस्त्री को 5 मीटर ऊँचे खंभे पर आ गई खराबी की मरम्मत करनी है। मरम्मत का काम करने के लिए उसे खंभे के शिखर से 1.3 मीटर नीचे एक बिंदु तक पहुँचना है। यहाँ तक पहुँचने के लिए प्रयुक्त सीढ़ी की लंबाई कितनी होनी चाहिए जिससे कि क्षैतिज से 60° के कोण से झुकाने पर वह अपेक्षित स्थिति तक पहुँच जाए? और यह भी बताइए कि खंभे के पाद-बिंदु से सीढ़ी के पाद-बिंदु तक की दूरी कितनी होनी चाहिए? (3 = 1.73)

› सबसे पहले, हमें यह निकालना होगा कि बिजली मिस्त्री को खंभे पर कितनी ऊँचाई तक पहुँचना है। कुल ऊँचाई 5 मीटर है और शिखर से 1.3 मीटर नीचे पहुँचना है। तो मरम्मत की ऊँचाई = 5 - 1.3 = 3.7 मीटर।

› अब, हमारे पास एक समकोण त्रिभुज है जहाँ ऊँचाई (लंब) 3.7 मीटर है, कोण 60° है, और हमें सीढ़ी की लंबाई (कर्ण) पता करनी है। लंब और कर्ण के संबंध के लिए हम sin अनुपात का प्रयोग करेंगे।

› तो, sin 60° = लंब / कर्ण = 3.7 / सीढ़ी की लंबाई।

› sin 60° का मान 3/2 होता है। तो, 3/2 = 3.7 / सीढ़ी की लंबाई।

› सीढ़ी की लंबाई = (3.7 × 2) / 3 = 7.4 / 1.73 4.28 मीटर।

› अब हमें खंभे के पाद-बिंदु से सीढ़ी के पाद-बिंदु तक की दूरी (आधार) पता करनी है। हमारे पास लंब (3.7 मीटर) और कोण (60°) है। लंब और आधार के संबंध के लिए हम cot अनुपात का प्रयोग करेंगे।

› तो, cot 60° = आधार / लंब = दूरी / 3.7।

› cot 60° का मान 1/3 होता है। तो, 1/3 = दूरी / 3.7।

› दूरी = 3.7 / 3 = 3.7 / 1.73 2.14 मीटर।

उत्तर – सीढ़ी की लंबाई लगभग 4.28 मीटर होनी चाहिए, और खंभे के पाद-बिंदु से सीढ़ी के पाद-बिंदु तक की दूरी लगभग 2.14 मीटर होनी चाहिए।

उदाहरण 7. 1.5 मीटर लंबा एक प्रेक्षक एक चिमनी से 28.5 मीटर की दूरी पर है। उसकी आँखों से चिमनी के शिखर का उन्नयन कोण 45° है। चिमनी की ऊँचाई ज्ञात कीजिए।

› सबसे पहले, हम चित्र बनाएँगे। चिमनी को AB मानेंगे और प्रेक्षक को CD। प्रेक्षक की ऊँचाई CD = 1.5 मीटर है। चिमनी से प्रेक्षक की दूरी BC = 28.5 मीटर है।

› प्रेक्षक की आँखों से चिमनी के शिखर तक एक क्षैतिज रेखा DE खींचेंगे। तो, DE = BC = 28.5 मीटर।

› उन्नयन कोण ADE = 45° है। हमें चिमनी की कुल ऊँचाई AB ज्ञात करनी है।

› समकोण त्रिभुज ADE में, हम tan का प्रयोग करेंगे क्योंकि हमें लंब (AE) और आधार (DE) चाहिए।

› tan 45° = AE / DE

› 1 = AE / 28.5

› AE = 28.5 मीटर।

› अब, चिमनी की कुल ऊँचाई AB = AE + EB होगी। यहाँ EB प्रेक्षक की ऊँचाई CD के बराबर है।

› AB = AE + CD

› AB = 28.5 + 1.5

› AB = 30 मीटर।

उत्तर – चिमनी की कुल ऊँचाई 30 मीटर है।

उदाहरण 8. भूमि के एक बिंदु P से एक 10 m ऊँचे भवन के शिखर का उन्नयन कोण 30° है। भवन के शिखर पर एक ध्वज को लहराया गया है और P से ध्वज के शिखर का उन्नयन कोण 45° है। ध्वजदंड की लंबाई और बिंदु P से भवन की दूरी ज्ञात कीजिए। (3 = 1.732 लें)

› सबसे पहले, एक चित्र बनाएँ। मान लीजिए AB भवन है, जिसकी ऊँचाई 10 m है। BD ध्वजदंड है, जिसकी लंबाई 'x' मान लेते हैं। बिंदु P से भवन की दूरी AP है।

› अब, हमारे पास दो समकोण त्रिभुज हैं: PAB (भवन के लिए) और PAD (ध्वजदंड सहित पूरी ऊँचाई के लिए)।

› पहले PAB में देखते हैं। हमें भवन की ऊँचाई (लंब) और बिंदु P से दूरी (आधार) निकालनी है।

› tan 30° = AB / AP

› 1/3 = 10 / AP

› AP = 103 मीटर।

› AP का मान रखते हैं: 10 × 1.732 = 17.32 मीटर। तो बदिु P से भवन की दूरी 17.32 मीटर है।

› अब PAD में देखते हैं। इसमें कुल ऊँचाई AD = AB + BD = (10 + x) मीटर है।

› tan 45° = AD / AP

› 1 = (10 + x) / (103)

› 103 = 10 + x

› x = 103 - 10

› x = 10 (3 - 1)

› x = 10 (1.732 - 1)

› x = 10 × 0.732

› x = 7.32 मीटर।

› तो ध्वजदंड की लंबाई 7.32 मीटर है।

उत्तर – ध्वजदंड की लंबाई = 7.32 m, बिंदु P से भवन की दूरी = 17.32 m

उदाहरण 9. एक समतल जमीन पर खड़ी मीनार की छाया उस स्थिति में 50 मीटर लंबी हो जाती है जबकि सूर्य का उन्नतांश 60° से घटकर 30° हो जाता है। मीनार की ऊँचाई ज्ञात कीजिए।

› पहले चित्र बनाते हैं। मान लो मीनार AB है और इसकी ऊँचाई 'h' मीटर है।

› जब उन्नयन कोण 60° था, तो छाया की लंबाई BC = 'x' मीटर थी। त्रिभुज ABC में, tan 60° = AB/BC = h/x।

› यहाँ से, 3 = h/x, तो h = 3x (समीकरण 1)

› जब उन्नयन कोण घटकर 30° हो जाता है, तो छाया की लंबाई 50 मीटर बढ़ जाती है। तो नई छाया की लंबाई BD = (x + 50) मीटर। त्रभिुज ABD में, tan 30° = AB/BD = h/(x + 50)।

› यहाँ से, 1/3 = h/(x + 50), तो h3 = x + 50 (समीकरण 2)

› अब, समीकरण 1 से 'h' का मान समीकरण 2 में रखते हैं: (3x)3 = x + 50

› यह हो जाएगा 3x = x + 50

› अब 'x' को एक तरफ ले आते हैं: 3x - x = 50, मतलब 2x = 50, तो x = 25 मीटर।

› अब 'x' का मान समीकरण 1 में वापस रख देते हैं: h = 3 ∗ 25

› तो h = 253 मीटर।

उत्तर – मीनार की ऊँचाई 253 मीटर है।

उदाहरण 10. एक बहुमंजिल भवन के शिखर से देखने पर, एक 8 मीटर ऊँचे भवन के शिखर और तल के अवनमन कोण क्रमशः 30° और 45° हैं। बहुमंजिल भवन की ऊँचाई और दोनों भवनों के बीच की दूरी ज्ञात कीजिए।

› सबसे पहले, एक बड़ा सा चित्र बनाएँ। बहुमंजिल भवन PC है और 8 मीटर ऊँचा भवन AB है।

› बहुमंजिल भवन के शिखर P से, छोटे भवन के शिखर B का अवनमन कोण 30° है। इसे हम एकांतर कोण से त्रिभुज PBD में PDB = 30° दखिाएंगे, जहाँ D, AC पर एक बदिु है ताकि ABCD एक आयत बने।

› शिखर P से, छोटे भवन के तल A का अवनमन कोण 45° है। इसे हम एकांतर कोण से त्रिभुज PAC में PAC = 45° दिखाएंगे।

› मान लो, PD = h' और भवनों के बीच की दूरी AC = BD = x है। AB = DC = 8m। तो बहुमंजिल भवन की कुल ऊँचाई PC = PD + DC = h' + 8m होगी।

› अब, त्रिभुज PDB में, tan 30° = PD/BD = h'/x. इससे हमें मिलेगा x = h'3। इसे समीकरण (1) मान लो।

› फिर, त्रिभुज PAC में, tan 45° = PC/AC = (h' + 8)/x. क्योंकि tan 45° = 1, तो (h' + 8)/x = 1, यानी x = h' + 8। इसे समीकरण (2) मान लो।

› समीकरण (1) और (2) से, h'3 = h' + 8।

› इसे हल करो: h'3 - h' = 8 h'(3 - 1) = 8 h' = 8/(3 - 1)।

› हर का परिमेयकरण करने पर: h' = 8(3 + 1) / ((3 - 1)(3 + 1)) = 8(3 + 1) / (3 - 1) = 8(3 + 1) / 2 = 4(3 + 1) मीटर।

› अब बहुमंजिल भवन की ऊँचाई PC = h' + 8 = 4(3 + 1) + 8 = 43 + 4 + 8 = 43 + 12 = 4(3 + 3) मीटर।

› दोनों भवनों के बीच की दूरी x = h' + 8 = 4(3 + 3) मीटर।

› और याद रहे, 3 का मान 1.732 होता है, जरूरत पड़ने पर इस्तेमाल करें।

उत्तर – बहुमंजिल भवन की ऊँचाई = 4(3 + 3) मीटर; दोनों भवनों के बीच की दूरी = 4(3 + 3) मीटर।

उदाहरण 11. एक नदी के पुल के एक बिंदु से नदी के सम्मुख किनारों के अवनमन कोण क्रमशः 30° और 45° हैं। यदि पुल किनारों से 3 मीटर की ऊँचाई पर हो, तो नदी की चौड़ाई ज्ञात कीजिए।

› सबसे पहले एक चित्र बनाते हैं। मान लो पुल का बिंदु P है और नदी के किनारे A और B हैं। पुल की ऊँचाई को PD से दिखाते हैं, जो कि 3m है। D बिंदु AB रेखा पर है।

› अब, अवनमन कोणों को चित्र में दर्शाते हैं। पुल से एक क्षैतिज रेखा खींचते हैं। किनारे A का अवनमन कोण 30° है, तो एकांतर कोण के नियम से त्रिभुज PDA में कोण PAD = 30° होगा। इसी तरह, किनारे B का अवनमन कोण 45° है, तो त्रिभुज PDB में कोण PBD = 45° होगा।

› पहले त्रिभुज PDA को देखते हैं। यह एक समकोण त्रिभुज है, जिसमें PD = 3m और कोण PAD = 30° है। हमें AD निकालना है। tan(30°) = PD / AD होता है।

› मान रखते हैं: 1/3 = 3 / AD. तो AD = 33 मीटर।

› अब दूसरे त्रिभुज PDB को देखते हैं। यह भी एक समकोण त्रिभुज है, जिसमें PD = 3m और कोण PBD = 45° है। हमें DB निकालना है। tan(45°) = PD / DB होता है।

› मान रखते हैं: 1 = 3 / DB. तो DB = 3 मीटर।

› नदी की कुल चौड़ाई AB = AD + DB है।

› मान रखने पर: AB = 33 + 3 मीटर।

› इसे हल करने पर: AB = 3(3 + 1) मीटर।

› अगर 3 का मान 1.732 रखें, तो AB = 3(1.732 + 1) = 3(2.732) = 8.196 मीटर।

› तो, नदी की चौड़ाई लगभग 8.20 मीटर है।

उत्तर – नदी की चौड़ाई 3(3 + 1) मीटर है (लगभग 8.20 मीटर)।

बोर्ड परीक्षा के लिए ख़ास

• दृष्टि-रेखा की परिभाषा अक्सर छोटे सवालों में पूछी जाती है। इसे अच्छे से समझ लो ताकि उन्नयन और अवनमन कोण भी आसानी से समझ सको।

• उन्नयन कोण वाले सवालों में चित्र बनाना बहुत ज़रूरी है। सही चित्र से ही आप समकोण त्रिभुज पहचान पाएँगे और त्रिकोणमितीय अनुपात सही लगा पाएँगे।

• अवनमन कोण और उन्नयन कोण हमेशा बराबर होते हैं, क्योंकि ये एकांतर अंतः कोण बनाते हैं। यह संबंध परीक्षा में सवाल हल करने में बहुत मदद करता है, इसे याद रखना!

• यह अवधारणा बोर्ड परीक्षाओं के लिए बहुत महत्वपूर्ण है। इससे कम से कम एक 3 या 4 अंक का प्रश्न ज़रूर आता है। हमेशा चित्र बनाकर और सही त्रिकोणमितीय अनुपात चुनकर ही सवाल हल करें।

• यह सवाल बोर्ड परीक्षा में अक्सर 3 या 4 नंबर का आता है। चित्र बनाना और सही त्रिकोणमितीय अनुपात चुनना बहुत महत्वपूर्ण है। 3, 2, और 1 के मान याद रखें।

• यह उदाहरण बोर्ड परीक्षा के लिए बहुत महत्वपूर्ण है! ऐसे 'व्यावहारिक समस्याओं' वाले प्रश्न अक्सर पूछे जाते हैं, जहाँ आपको दिए गए परिदृश्य को एक समकोण त्रिभुज में बदलकर हल करना होता है। सही चित्र बनाना और सही अनुपात चुनना ही आपकी सफलता की कुंजी है।

• यह बहुत ही महत्वपूर्ण अवधारणा है और बोर्ड परीक्षा में इस पर आधारित एक प्रश्न निश्चित रूप से आता है। चित्र सही बनाना और प्रेक्षक की ऊँचाई जोड़ना या घटाना न भूलना, यही मुख्य गलती बच्चे करते हैं।

• यह प्रश्न बोर्ड परीक्षा में अक्सर 4 या 5 अंक का आता है। चित्र सही बनाना और चरणों को स्पष्ट रूप से लिखना बहुत महत्वपूर्ण है। 3 का मान 1.732 याद रखें।

• यह सवाल बोर्ड परीक्षा में अक्सर 3 से 5 अंकों में आता है। चित्र सही बनाना और 'x' और 'h' के लिए सही समीकरण बनाना सबसे ज़रूरी है।

• यह प्रश्न अक्सर बोर्ड परीक्षा में 4 या 5 अंकों के लिए पूछा जाता है, खासकर उदाहरण 6 जैसा सवाल। चित्र सही बनाना और एकांतर कोणों को सही से दिखाना बहुत महत्वपूर्ण है।

• यह प्रश्न बोर्ड परीक्षा में अक्सर पूछा जाता है। चित्र बनाते समय अवनमन कोण को क्षैतिज रेखा के साथ सही जगह पर चिह्नित करना और फिर उसे एकांतर कोण के रूप में त्रिभुज के अंदर इस्तेमाल करना सीख लो, पूरे अंक मिलेंगे!

एक नज़र में रिवीज़न

› प्रेक्षक की आँख से वस्तु तक की सीधी काल्पनिक रेखा।
› उन्नयन कोण: वस्तु आँख के स्तर से ऊपर, सिर उठाना पड़े।
› अवनमन कोण = ऊपर से नीचे देखने पर, क्षैतिज से नीचे की ओर बना कोण।
› त्रिकोणमिति का उपयोग कर अज्ञात ऊंचाइयों व दूरियों को ज्ञात करना।
› मीनार की ऊँचाई = आधार × tan(उन्नयन कोण)
› सीढ़ी की लंबाई व स्थिति = ऊँचाई, कोण से sin/cot का उपयोग।
› प्रेक्षक की ऊँचाई को गणना में शामिल करें; कुल ऊँचाई = (त्रिकोणमिति से प्राप्त ऊँचाई) + (प्रेक्षक की ऊँचाई)।
› दो उन्नयन कोण = दो त्रिभुज, समान भुजा से हल करें।
› उन्नतांश परिवर्तन परछाई बदलता है, tan से ऊँचाई निकालो।
› उन्नयन/अवनमन कोण: दो कोणों से दो ऊँचाई/दूरी ज्ञात करना।
› नदी की चौड़ाई = पुल से दोनों किनारों की क्षैतिज दूरियों का योग (अवनमन कोणों से)